

Б. О. КОЦЕРЖИНСЬКИЙ

## РІВНЯННЯ НЕЛАМІНАРНОГО РУХУ ЕЛЕКТРОНІВ У ПЕРІОДИЧНОМУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОМУ ПОЛІ

У роботі [1] було показано, що можна вибрати таку періодичну систему електродів, в якій рух пучка електронів буде прямолінійний. Розподіл потенціалу на осі в аксіально-симетричній системі у присутності об'ємного заряду електронів описується рівнянням

$$V \approx A_0 - B_0 |\cos mx|,$$

де  $A_0, B_0, m$  — постійні величини;  
 $x$  — поздовжня координата.

Вимірювання електростатичного поля на електролітичній ванні, але без пучка електронів показали, що закон розподілу потенціалу на осі мало змінюється, тобто його можна визначити як

$$V \approx A_1 - B_1 |\cos mx|.$$

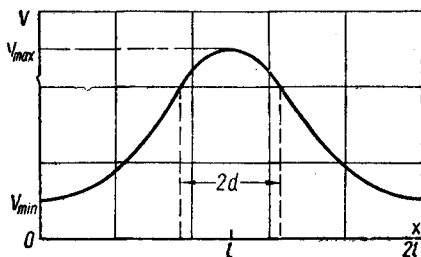


Рис. 1. Розподіл потенціалу по осі системи.

У згаданій системі використані електроди з вищим потенціалом у вигляді сіток. Це дуже утруднює практичне використання її. Якщо замість сіток узяти електроди з центральним отвором, то електростатичне поле змінює свою форму поблизу цього отвору.

Припустимо, що розподіл потенціалу на осі має вигляд (рис. 1)

$$V = \begin{cases} A - B \cos \frac{\pi}{2l} x; & 0 < x < l - d; \\ C + D \sin \frac{\pi}{2d} (x - l + d); & l - d < x < l + d. \end{cases} \quad (1)$$

Використовуючи вираз (1), можна знайти потенціал у кожній

точці системи. Залишемо розв'язок рівняння Лапласа у вигляді суми ряду

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0 \left( \frac{n\pi r}{l} \right) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (2)$$

Розкладемо вираз (1) у ряд Фур'є

$$\begin{aligned} V = & \left[ A - B \frac{d}{l} \sin \frac{\pi d}{2l} - B \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{d}{l} \right) \cos \frac{\pi d}{2l} \right] + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 2B \left( -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi \cdot \sin \frac{n\pi d}{l} \cdot \sin \frac{\pi d}{2l} + \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} (2n-1) \cdot \cos \frac{\pi d}{2l} (2n-1)}{1-2n} - \\ & - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2} (1+2n) \cdot \cos \frac{\pi d}{2l} (1+2n)}{1+2n} + \\ & \left. + \frac{d^2}{l^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos n\pi \cdot \cos \frac{n\pi d}{l} \cdot \cos \frac{\pi d}{2l}}{1-4n^2} \right). \quad (3) \end{aligned}$$

Покладаючи в (2)  $r = 0$ , прирівняємо (2) і (3), тоді одержимо вираз для коефіцієнтів  $A_n$

$$\begin{aligned} A_0 = & A - B \frac{d}{l} \cdot \sin \frac{\pi d}{2l} - B \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{d}{l} \right) \cdot \cos \frac{\pi d}{2l}, \\ A_n = & \frac{2B}{\pi} \left( -\frac{1}{n} \cos n\pi \cdot \sin \frac{n\pi d}{l} \cdot \sin \frac{\pi d}{2l} + \right. \\ & + \frac{\sin \frac{\pi}{2} (2n-1) \cdot \cos \frac{\pi d}{2l} (2n-1)}{1-2n} - \frac{\sin \frac{\pi}{2} (1+2n) \cdot \cos \frac{\pi d}{2l} (1+2n)}{1+2n} + \\ & \left. + \frac{2d^2}{l^2} \cdot \frac{\cos n\pi \cdot \cos \frac{n\pi d}{l} \cdot \cos \frac{\pi d}{2l}}{1-4n^2} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

де  $n = 1, 2, 3, \dots$

Розглянемо тепер поведінку пучка електронів у такій системі. Розіб'ємо циліндричний пучок на вході на  $m$  кілець, як показано на рис. 2.

Кожне кільце замінимо нескінченно тонким кільцем з радіусом  $r_{0i}$  в центрі дійсного кільця, як показано пунктирною прямою на рис. 2,

$$r_{0i} = \frac{r_0}{2m} (2i - 1), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (5)$$

Припустимо, що на вході пучок має рівномірну густину об'ємного заряду. Густина струму на вході

$$j_0 = \frac{I}{\pi r_0^2},$$

де  $I$  — струм пучка.

Струм кожного кільця

$$I_i = j_0 \pi \left\{ \left( \frac{r_0}{m} i \right)^2 - \left[ \frac{r_0}{m} (i-1) \right]^2 \right\} = \frac{I(2i-1)}{m r_0}. \quad (6)$$

Поле кожного кільця можна визначити, вважаючи потенціал

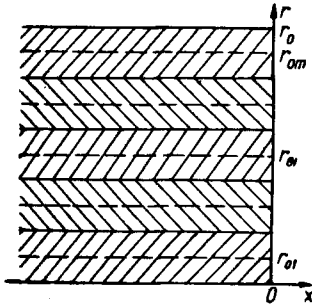


Рис. 2. Пучок електронів на вході до фокусуєчої системи.

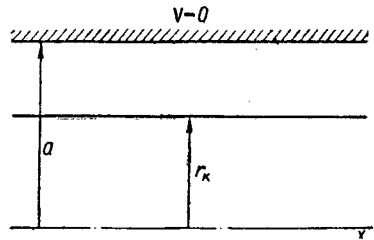


Рис. 3. Схема для визначення поля об'ємного заряду кільця.

системи рівним нулю і замінюючи дійсну систему на циліндр радіуса  $a$  (рис. 3). З теореми Гауса маємо

$$\epsilon \oint \bar{E} d\bar{s} = \int_V \rho dv,$$

тобто нескінченно довгого кільця

$$\epsilon E 2\pi r_k dx = \frac{I_k}{v_k} dx, \quad (7)$$

де  $v_k$  — швидкість електронів.

Тепер із (7) визначаємо напруженість поля об'ємного заряду на зовнішній поверхні кільця

$$E_{гр.к} = \frac{I_k}{v_k 2\pi \epsilon r_k}. \quad (8)$$

Напруженість поля об'ємного заряду між кільцем і циліндром знайдемо із рівняння Лапласа

$$E = - \frac{C_1}{r}.$$

Використовуючи значення  $E_{гр.к}$  при  $r = r_k$ , одержимо

$$E = \frac{E_{гр.к} r_k}{r} \text{ при } r_k \leq r \leq a.$$

Поле дорівнює нулю всередині кільця. Підставляючи значення  $E_{гр,к}$  із (8) та значення  $I_k$  із (6), одержимо

$$E = \frac{I(2k-1)}{2\pi m e r_0 v_k} . \quad (9)$$

Тепер можна визначити повну напруженість поля всіх кілець у точці  $r_i$

$$E_i = \sum_{k=1}^m e(r_k r_i), \quad (10)$$

де

$$e(r_k, r_i) = \begin{cases} \frac{I(2k-1)}{2\pi m e r_0 v_k}, & r_k \leq r_i; \\ 0, & r_k > r_i. \end{cases}$$

Будемо далі вважати, що струм кожного кільця не змінюється при русі електронів і дією поздовжньої складової поля об'ємного заряду можна знехтувати. Тоді рівняння руху електронів можна записати у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d^2 r_i}{dt^2} &= -\Sigma E_r \\ \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -\Sigma E_x \end{aligned} \right\}; \quad (11)$$

де

$$\Sigma E_r = E_i + E_f = E_i - \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

$$\Sigma E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} .$$

Для числових розрахунків на обчислювальній машині розбивають пучок на 10—15 кілець, а в розкладанні фокусуєного поля можна обмежитись першими трьома членами. Коефіцієнти  $A$  і  $B$  можна визначити з мінімального та максимального потенціалу на осі системи

$$A = \frac{U_{\max} - U_{\min} \cdot \sin \frac{\pi d}{2l}}{1 - \sin \frac{\pi d}{2l}}, \quad B = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{1 - \sin \frac{\pi d}{2l}} . \quad (12)$$

#### ЛІТЕРАТУРА

1. S i e k a n o w i c z W. W., Derivation of Ideal Electrode Shapes for Electrostatic Beam Focusing, RCA Rev., vol. 23, p. 47—59, 1962.

*B. A. KOTSERJINSKY*

THE EQUATIONS OF NONLAMINAR ELECTRON BEAM MOTION  
IN THE PERIODIC QUASIOPTIMAL ELECTROSTATIC FIELD

S u m m a r y

This paper deals with the equations of an electron beam motion in a periodic electrostatic field. The beam is divided into  $m$  rings at the input of the focusing system and the motion of every ring is considered. The focusing system uses the electrodes with central holes instead of grids used in the ideal focusing system [1].