Г. І. ВАСЮК

ВІДНОВЛЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ЗА ДИСКРЕТНИМИ ВІДЛІКАМИ

У багатьох випадках треба визначити похибку відновлення за скінченною кількістю відліків сигналу, що описується відрізком функції з обмеженим спектром. В [1] наведено вираз для визначення середньоквадратичної по осі часу похибки. Іноді час існування сигналу відомий точно. Тоді середньоквадратичну похибку визначають на відрізку існування сигналу. Крім того, в деяких випадках важливо знати зміну похибки вздовж відрізка відновлення.

Розглянемо похибку відновлення для випадку, коли сигнал являє собою відрізок випадкового стаціонарного в широкому розумінні процесу з обмеженим спектром.

Припустимо, що на відрізку відновлення взято Q відліків з часовим інтервалом Δt. Розглянемо похибку на інтервалі Δt праворуч від M-го відліку. Абсолютна похибка відновлення реалізації випадкового сигналу на цьому інтервалі

$$\alpha_M(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\frac{\sin\pi\left(\frac{t}{\Delta t}-k\right)}{\pi\left(\frac{t}{\Delta t}-k\right)}-\sum_{k=-(M-1)}^{N} f(k\Delta t)\frac{\sin\pi\left(\frac{t}{\Delta t}-k\right)}{\pi\left(\frac{t}{\Delta t}-k\right)},$$

де $f(k\Delta t)$ — k-й відлік цієї реалізації;

$$N=Q-M.$$

Середній квадрат відносної похибки на M-му інтервалі Δt

$$\overline{\delta_M^2}=\frac{1}{\Delta t\sigma^2}\int_0^{\Delta t}|\alpha(t)|^2dt,$$

де

$$\sigma^2=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\overline{|f(t)|^2}\,dt.$$

Тоді середній по множині квадрат похибки відновлення

$$\overline{\delta_M^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{-M} \sum_{n=-\infty}^{-M} \frac{\overline{f(m\Delta t)\, f(n\Delta t)}}{\sigma^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x - \pi m)\sin(x - \pi n)}{(x - \pi m)(x - \pi n)}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\overline{f(m\Delta t)\, f(n\Delta t)}}{\sigma^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x - \pi m)\sin(x - \pi n)}{(x - \pi m)(x - \pi n)}\, dx +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{-M} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\overline{f(m\Delta t) f(n\Delta t)}}{\sigma^2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x - \pi m)\sin(x - \pi n)}{(x - \pi m)(x - \pi n)}\, dx. \quad (1)$$

Оскільки розглядається ергодичний процес, коефіцієнт коваріації

$$R[(m - n)\Delta t] = \frac{\overline{f(m\Delta t)\, f(n\Delta t)}}{\sigma^2} \quad (2)$$

є одночасно і коефіцієнтом кореляції, тобто $R[(m-n)\Delta t]$ не залежить від абсолютних значень часу $m\Delta t$ і $n\Delta t$, а залежить тільки від різниці $(m - n)\Delta t$. Беручи це до уваги та інтегруючи вираз (1), одержимо

$$\overline{\delta_M^2} = 1 - \frac{1}{\pi}[Si\pi M + Si\pi(Q - M)] + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \left\{\frac{R(k\Delta t)}{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^Q}{Q+k} R[(Q+k)\Delta t]\right\}\left[\ln\frac{(M+k)(Q-M+k)}{M(Q-M)} + Ci2\pi M + \right.$$

$$\left. + Ci2\pi(Q - M) - Ci2\pi(M + k) - Ci2\pi(Q - M + k)\right]. \quad (3)$$

Таким чином, середній квадрат похибки при заданій кількості відліків повністю визначається функцією кореляції первісного процесу. Ряд (3) дає можливість, знаючи кореляційну функцію, визначити середньоквадратичну похибку з будь-якою точністю. Змінивши у формулі (3) інтегральні косинуси степеневими рядами, можна одержати такий варіант виразу для середнього квадрата похибки:

$$\overline{\delta_M^2} = 1 - \frac{1}{\pi}[Si\pi M + Si\pi(Q - M)] + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left\{R(k\Delta t) - \right.$$

$$\left. - (-1)^Q \frac{k}{Q+k} R[(Q+k)\Delta t]\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\,(2n)!} \sum_{m=0}^{2n-1} k^m [M^{2n-m-1} +$$

$$+ (Q - M)^{2n-m-1}].$$

Оскільки при виведенні формули (3) ніяких обмежень на величину M не накладалось, вираз (3) може бути використаний для визначення похибки на будь-якому інтервалі Δt всередині відрізка відновлення. Тому середній для всього відрізка відновлення квадрат похибки може бути визначений так:

$$\overline{\delta^2} = \frac{1}{Q-1} \sum_{M=1}^{Q-1} \overline{\delta_M^2}.$$

На закінчення відзначимо, що в разі, коли відновлюваний сигнал є білий шум, пропущений через прямокутний фільтр з верхньою частотою $2/\Delta t$, формула (3) спрощується до вигляду

$$\overline{\delta_M^2} = 1 - \frac{1}{\pi} [Si\pi M + Si\pi (Q - M)],$$

що збігається з виразом, одержаним у [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. Хургин Я. И. и Яковлев В. П., Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике, Физматгиз, 1962.

2. Reconstruction Error and Delay for Amplitude-Sampled White Noise, PIKE, September, 1961.

G. I. VASUCK

RECONSTRUCTION OF AMPLITUDE-SAMPLED WIDE-SINCE STATIONARY RANDOM PROCESS

Summary

Formula for mean-square reconstruction error is obtained if a finite number of samples of wide-since stationary random process are used.