

В. В. ЗУБКО, О. Г. КАЛЮЖНИЙ, Р. І. ГРОЗНОВА

СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ІНТЕРВАЛІВ МІЖ «НУЛЯМИ» ВПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

1. Одновимірний розподіл тривалостей інтервалів між нулями нормального шуму. Вигляд функцій розподілу $P(\tau)$ для нормально-го шуму з постійною густиною в смузі Δf , побудованих на основі експериментальних гістограм, зображений на рис. 1.

Аналіз одержаних даних показав, що зручною апроксимацією для одновимірного розподілу імовірностей $F(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} P(\tau) d\tau$ тривало-стей інтервалів між нулями нормального шуму з прямокутним ча-

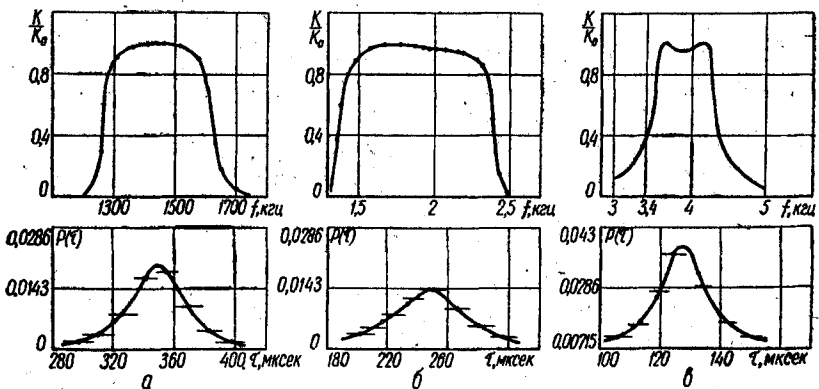


Рис. 1. Одновимірний розподіл тривалостей інтервалів між нулями нормально-го шуму:

а — фільтр а; $\bar{\tau} = 348$ мксек; $|\tau - \bar{\tau}| = 23,5$ мксек; б — фільтр б; $\bar{\tau} = 248$ мксек; $|\tau - \bar{\tau}| = 33,3$ мксек; в — фільтр в; $\bar{\tau} = 128$ мксек; $|\tau - \bar{\tau}| = 7,6$ мксек.

стотним спектром є функція розподілу Стюдента при $n = 5$ (рис. 2). Функції Стюдента табульовані, тому прийнята апроксимація зручна.

Для інженерної оцінки $F(\tau)$ треба знати два параметри: середнє

(найбільш імовірне) значення тривалості інтервалів $\bar{\tau}$ та середнє значення абсолютного відхилення тривалості інтервалу від її найбільш імовірного значення $|\tau - \bar{\tau}|$. Ці параметри були запропоновані Райсом [3] для ідеального прямокутного фільтра. Обидва вони

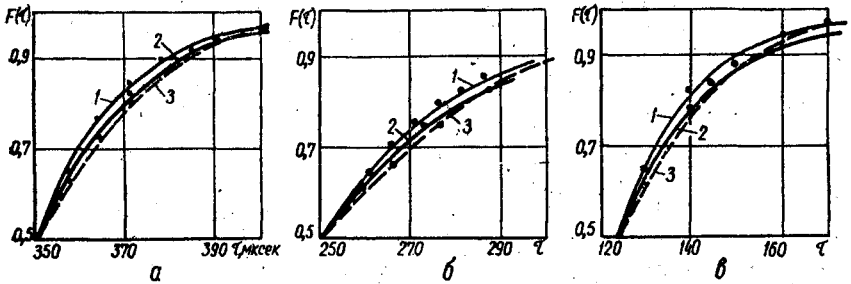


Рис. 2. Інтегральна функція розподілу:

a — фільтр *a*; *b* — фільтр *b*; *v* — фільтр *v*; 1 — вузькосмугове наближення Райса; 2 — емпірична функція розподілу; 3 — функція розподілу Стюдента.

зв'язані з функцією спектральної густини шуму простими співвідношеннями

$$\bar{\tau} = \frac{1}{f_v + f_n}; \quad |\tau - \bar{\tau}| = \frac{\Delta f}{\sqrt{3}(f_v + f_n)^2}; \quad \frac{|\tau - \bar{\tau}|}{\bar{\tau}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta f}{f_0}$$

де f_v — верхня частота спектра шуму;
 f_n — нижня його частота;
 f_0 — центральна частота;
 $\Delta F = f_v - f_n$.

Для реальних фільтрів, які принципово не можуть мати ідеальну прямокутну частотну характеристику, функція Стюдента при $n = 5$ дає краще наближення до фактичного розподілу $F(\tau)$, ніж загальновідома апроксимація Райса.

2. Одновимірний розподіл інтервалів між нулями для суміші нормального шуму та синусоїдного сигналу. В присутності сигналу вигляд розподілу $P(\tau)$ змінюється (рис. 3). При зростанні співвідношення сигнал/шум¹ зміщується центр розподілу і відбувається концентрація тривалостей інтервалів навколо півперіоду сигналу.

Відносна величина зміщення центра розподілу як функція співвідношення сигнал/шум може бути з достатньою точністю апроксимована формулою (рис. 4)

$$\frac{\Delta\tau_{ш}}{\Delta\tau_c} = \Phi(a/2),$$

де

$$\Delta\tau_{ш} = \tau_{\max} - \bar{\tau};$$

¹ Під співвідношенням сигнал/шум тут і далі розуміємо відношення амплітуди сигналу до середньоквадратичного значення шуму $a = \frac{U_{\text{сг}}}{\sigma_{\text{ш}}}$.

$$\Delta\tau_c = \tau_c - \bar{\tau};$$

$\tau_{\text{макс}}$ — абсциса центра розподілу;
 τ_c — півперіод сигналу;

$\Phi(x)$ — інтеграл імовірностей $\left(\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$.

Концентрація інтервалів навколо півперіоду сигналу приводить до нормалізації розподілу, як це можна бачити з рис. 3. При $\Delta\tau_c = 0$ і $a \geq 1$ залежність

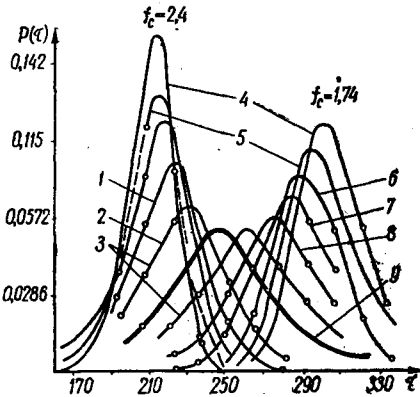


Рис. 3. Одновимірний розподіл тривалостей інтервалів між нулями суміші нормального шуму та синусоїдного сигналу (фільтр б):

1 — $a = 2$; 2 — $a = 1,5$; 3 — $a = 1$; 4 — $a = 4$; 5 — $a = 3$; 6 — $a = 2,5$; 7 — $a = 2$; 8 — $a = 1,5$; 9 — $a = 0$.

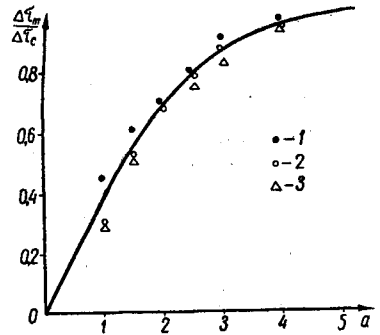


Рис. 4. Зміщення центра розподілу:

1 — фільтр а; 2 — фільтр б;
 3 — фільтр в.

максимуму розподілу від співвідношення сигнал/шум може бути прийнята лінійною згідно з емпіричною формулою (рис. 5)

$$P_{\text{макс}_{\text{с+ш}}} = \left(1 - \frac{\Delta f}{f_0}\right) P_{\text{макс}_{\text{ш}}} (1 + k_0 \cdot a).$$

Згідно з експериментальними даними $k_0 = 0,01$

Якщо ж частота сигналу не збігається з центральною частотою спектра шуму ($\Delta\tau_c \neq 0$), то максимум розподілу буде тим нижче, чим більше розбіг $\Delta\tau_c$. Зменшення $P_{\text{макс}_{\text{с+ш}}}$ приблизно можна оцінити по зменшенню кута нахилу (рис. 6) за формулою

$$k_1 = k_0 \left(1 - \frac{\Delta\tau_c}{\tau_{\text{макс}} - \tau_{\text{мін}}}\right) = k_0 \left(1 - \frac{\Delta\tau_c}{\Delta f} \cdot 2f_b \cdot f_n\right),$$

де

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{1}{2f_n}; \quad \tau_{\text{мін}} = \frac{1}{2f_b}.$$

3. Розподіл числа інтервалів заданої тривалості в ансамблі реалізацій довжиною T . Розглянемо, з якою точністю може бути визначений одновимірний закон розподілу $P(\tau)$ по реалізації обмеженої довжини T .

Густина імовірностей (одновимірний розподіл) $P(\tau)$ визначається відносною кількістю влучень кінця вимірюваного інтервалу в послідовно розташовані інтервали квантування довжиною $\Delta\tau$. При малому $\Delta\tau$ імовірність виникнення в межах інтервалу кореляції вхідного процесу принаймні двох «півперіодів» тривалістю $\tau_i \div \tau_i +$

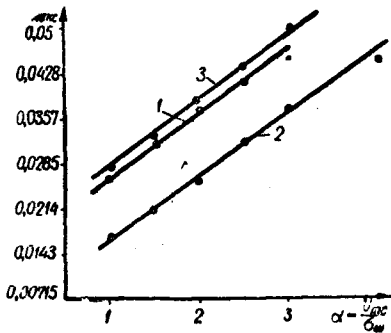


Рис. 5. Залежність максимуму розподілу від співвідношення сигнал/шум ($\Delta\tau_c = 0$):

1 — фільтр а, $f_0 = 1425$ гц; $\Delta f = 340$ гц;
2 — фільтр б, $f_0 = 2$ кГц; $\Delta f = 950$ гц;
3 — фільтр в, $f_0 = 3,95$ кГц; $\Delta f = 840$ гц.

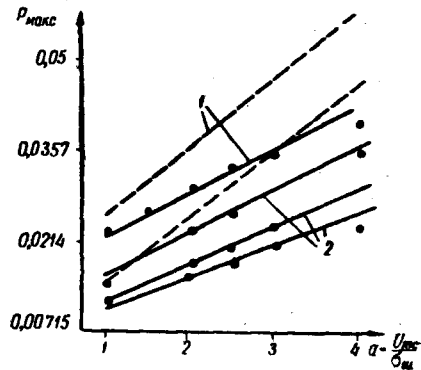


Рис. 6. Залежність максимуму розподілу від співвідношення сигнал/шум ($\Delta\tau_c = 0$):

1 — фільтр а, $\Delta\tau = 26$ мксек; 2 — фільтр б;
 $\Delta\tau_1 = 36$ мксек; $\Delta\tau_2 = 49$ мксек; $\Delta\tau_3 = 56$ мксек.

+ $\Delta\tau$ прямує до нуля. У цьому випадку влучення кінця вимірюваного інтервалу в даний інтервал квантування $\Delta\tau_i$ можна розглядати як послідовність незалежних випробувань.

Вважаючи, що p_i — імовірність виникнення інтервалу тривалістю $\tau_i \div \tau_i + \Delta\tau$ у кожному випробуванні мала, а кількість випробувань велика ($\frac{T}{2\tau} = N_0 \gg 1$), для визначення імовірності того, що внаслідок N_0 випробувань з'явиться N інтервалів тривалістю $\tau_i \div \tau_i + \Delta\tau$, треба користуватися асимптотичною формулою Пуассона

$$P_N(T) = \frac{\lambda^N}{N!} e^{-\lambda T},$$

де $\lambda T = p_i \bar{N} T = \bar{N}_i$ — середнє число інтервалів $\tau_i \div \tau_i + \Delta\tau$ за час T . Виходячи з цього, можна записати

$$\frac{\sigma_{N_i}(T)}{\bar{N}_i} = \frac{1}{\sqrt{p_i \bar{N} T}},$$

де $\sigma_{N_i}(T)$ — дисперсія числа інтервалів заданої тривалості за час T .

На рис. 7 показано обчислену залежність та експериментальні точки для відносної дисперсії $\frac{\sigma_{N_i}(T)}{\bar{N}_i}$. Звичайно, модель незалежних

випробувань буде тим точніша, чим більш широкосмуговим є вхідний процес і чим менше інтервал Δt .

Експериментальні дослідження показали, що прийнята модель дає задовільні результати при $\rho_t \leq 0,4$, якщо широкосмуговість процесу $\frac{\Delta f}{f_0} \geq 0,2$ як для чистого шуму, так і для суміші сигналу з шумом.

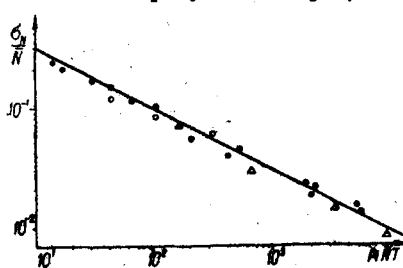


Рис. 7. Відносна дисперсія числа інтервалів заданої тривалості.

прямує до значення відносної дисперсії числа «нулів» вхідного процесу.

При збільшенні ρ_t , що може статися внаслідок зменшення широкосмуговості системи, або розширення інтервалу квантування Δt , або збільшення співвідношення сигнал/шум, відносна дисперсія числа інтервалів, тривалість яких зменшується і в міру зменшення,

ЛІТЕРАТУРА

1. Зубко В. В., Соколенко А. Ф., Прибор для измерения распределения вероятностей интервалов между нулями низкочастотных случайных процессов, Вестник Киевского политехнического института, Изд-во Киевского университета, вып. 2, 1965.
2. Longuet-Higgins M. S., The distribution of intervals between Zeroes of a stationary random function. Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, v. 254, May 1962.
3. Райс С., Теория флуктуационных шумов, сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», под ред. Н. А. Железнова, ИЛ, 1953.

V. V. ZUBKO, O. G. KALJUZHNY, R. I. GROZNOVA

STATISTICAL CHARACTERISTICS OF THE RANDOM PROCESSES INTERVALS BETWEEN ZEROES

Summary

In the article on the base of the numerous experimental data some characteristics of singledimensional distribution probabilities density of time intervals between zeroes of random processes, which are either normal noise, passed through the band-pass filters with different frequency responses, or the mixture of the sinusoidal signal with the same noise are investigated.

Some empirical formulas and graphs for the calculating characteristics of distribution are given.

The accuracy of determination of the distribution characteristics using the realisation of finite duration is evaluated.