Г. І. ВАСЮК

ЗМЕНШЕННЯ ПОХИБКИ ПРИ ВІДНОВЛЕННІ ВІДРІЗКА ФУНКЦІЇ З ОБМЕЖЕНИМ СПЕКТРОМ ПО ДИСКРЕТНИХ ВІДЛІКАХ

Деякі види радіосигналів з достатньою точністю можуть бути виражені відрізками цілих функцій скінченного порядку, тобто функцій з обмеженим спектром. Відновлення таких сигналів по відліках, зроблених з обмеженою частотою, можливо тільки з похибкою, оскільки при скінченній кількості відліків доводиться користуватися зрізаним рядом Котельникова. Розглянемо одну можливість зменшення похибки відновлення в цьому випадку.

Теорема Котельникова передбачає відновлення функції з обмеженим спектром по відліках, взятих з часовим інтервалом $\Delta t \geqslant \frac{\pi}{\omega_в}$,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\, b(t - k\Delta t), \tag{1}$$

де $\omega_в$ — верхня кутова частота спектра відновлюваної функції.

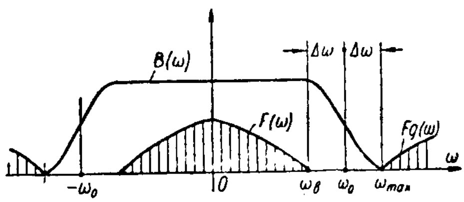
При $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_в}$ композиційна функція $b(t) = \sin \omega_в t / \omega_в t$. Покажемо, що при збільшенні частоти відліків, тобто при $\Delta t < \frac{\pi}{\omega_в}$, можна зобразити функцію з обмеженим спектром у вигляді ряду з більш складними композиційними функціями, які спадають швидше, ніж функція виду $\sin x/x$.

Форма композиційної функції визначається такими умовами. Сукупність дискретних значень функції з обмеженим спектром $f(t)$, взятих з інтервалом Δt, утворює дискретну функцію, зв'язану з початковою функцією залежністю [1]

$$f_д(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\, \delta(t - k\Delta t),$$

де δ — функція Дірака.

Спектр Фур'є дискретної функції $f_д(t)$ є періодична функція $f_д(\omega)$ з періодом повторення $\omega_п = \frac{2\pi}{\Delta t}$. Всередині періоду $(-\omega_в) \div \omega_в$ спектр дискретної функції збігається зі спектром початкової функції. Отже, спектр початкової функції можна одержати множенням спектра $f_д(\omega)$ на «висікаючу» функцію $B(\omega)$, яка має вигляд прямокутника, розміщеного в інтервалі $(-\omega_в) \div \omega_в$ і по висоті рівного 1. Як відомо, композиційна функція є зворотне перетворення Фур'є висікаючої функції $B(\omega)$. Застосовуючи зворотну теорему Фур'є, легко переконатися, що прямокутній висікаючій



функції відповідає функція виду $\sin x/x$. Але при збільшенні частоти відліків, тобто при $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_0} < \frac{\pi}{\omega_в}$, висікаюча функція не обов'язково повинна бути прямокутною. Дійсно, при $\omega_п = 2\omega_0 > 2\omega_в$ у спектрі дискретної функції виникають ділянки, де $F_д(\omega) \equiv 0$ (див. рис). На цих ділянках висікаючу функцію можна вибирати довільно. Необхідно лише, щоб вона в жодній точці цієї ділянки не перетворювалась на нескінченність. Така свобода вибору «фронтів» висікаючої функції дає можливість застосувати розкладення в ряд по композиційних функціях, які спадають швидше, ніж функції $\sin x/x$. При цьому звичайно бажано зберегти важливу властивість ряду Котельникова: алгебричну незалежність відліків, тобто виконання умови: $b(k\Delta t) = 0$ при $k \neq 0$.

I. Розглянемо питання про похибку відновлення відрізка функції з обмеженим спектром при використанні композиційної функції форми

$$b(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} \cdot \varphi(t), \tag{2}$$

де $\varphi(t)$ — парна спадаюча вагова функція.

Якщо відновлювана функція знакозмінна, різні відліки можуть мати різні знаки, а це означає, що ряд (1) не буде ні додатним, ні почережним. Ця обставина утруднює оцінку похибки при відновленні відрізка функції зрізаним рядом (1). Тому обмежимося визначенням верхньої межі похибки.

Середньоквадратична похибка при відновленні відрізка функції по 2 N відліках, взятих на ділянці відновленням,

$$\delta^2 = \int\limits_{-N\Delta t}^{N\Delta t} |f(t) - f_N(t)|^2 dt,$$

де

$$f_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} f(k\Delta t)\, b(t - k\Delta t).$$

Враховуючи (1), одержуємо

$$\delta^2 = \sum_{k=-\infty}^{-(N+1)} \sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} f(k\Delta t) f(n\Delta t)\, \Psi(n-k) +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} f(k\Delta t) f(n\Delta t)\, \Psi(n-k) +$$

$$+ 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N+1)} \sum_{n=N+1}^{\infty} f(k\Delta t) f(n\Delta t)\, \Psi(n-k),$$

де

$$\Psi(n-k) = \int\limits_{-N\Delta t}^{N\Delta t} b(t - k\Delta t)\, b(t - n\Delta t)\, dt. \qquad (3)$$

Звідси межа середньоквадратичної похибки

$$\delta^2 < \sum_{k=-\infty}^{-(N+1)} \sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} |f(k\Delta t) f(n\Delta t)\, \Psi(n-k)| +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(k\Delta t) f(n\Delta t)\, \Psi(n-k)| +$$

$$+ 2 \sum_{k=-\infty}^{-(N+1)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(k\Delta t) f(n\Delta t)\, \Psi(n-k)|. \qquad (4)$$

З виразу (4) випливає, що застосування замість $b(t) = \sin \omega_0 t / \omega_0 t$ композиційної функції виду (2) зменшує верхню межу середньоквадратичної похибки. Дійсно, при фіксованих значеннях $f(k\Delta t)$, $f(n\Delta t)$ і N верхня межа похибки залежить тільки від функції $\Psi(n-k)$. В свою чергу функція $\Psi(n-k)$ визначається композиційною функцією $b(t)$. Тому функція $\Psi(n-k)$ пропорціональна площі, обмеженій кривою $b(t - k\Delta t)$ $b(t - n\Delta t)$ і віссю абсцис. Отже, $\Psi(n-k)$ при незмінних значеннях n і k зменшується при збільшенні швидкості спадання функції $b(t)$. Таким чином, при застосуванні композиційних функцій виду (2) зі спадаючими ваговими функціями зменшується кожний член ряду, який стоїть у правій частині виразу (4), а тому зменшується верхня межа середньоквадратичної похибки при відновленні відрізка функції з обмеженим спектром по скінченному числу відліків на відновлюваному відрізку. На жаль, по формулі (4) провести кількісне порівняння межі похибки при заміні зрізаного ряду Котельникова зрізаним рядом з композиційними функціями виду (2) в загальному вигляді неможливо. Тому обмежимося для ілюстрації сказаного конкретним прикладом, який дано в кінці статті.

II. Розглянемо питання про форму висікаючої спектральної функції, необхідну для одержання композиційної функції виду (2). Зобразимо висікаючу функцію $B(\omega)$ у вигляді суми прямокутної функції $B_1(\omega)$ з основою $2\omega_0$ і функції $B_2(\omega)$, яка визначає форму «фронтів» висікаючої функції. Функція $B_2(\omega)$ відмінна від 0 в інтервалі $\omega_в \div \omega_{max}$, на якому спектр $F_д(\omega) \equiv 0$. Враховуючи парність композиційної функції, запишемо зворотне перетворення Фур'є композиційної функції у вигляді

$$b(t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_0^{\omega_0} \cos \omega t d\omega + \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{\omega_в}^{\omega_{max}} B_2(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

де

$$\omega_{max} = 2\omega_0 - \omega_в.$$

Позначивши

$$b_2(t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{\omega_в}^{\omega_{max}} B_2(\omega) \cos \omega t d\omega, \tag{5}$$

одержимо

$$b(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} + b_2(t). \tag{6}$$

Визначимо деякі необхідні властивості спектральної функції $B_2(\omega)$. З (1) та (6) маємо

$$b(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} \cdot \varphi(t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} + b_2(t),$$

звідки

$$b_2(t) = \frac{\varphi(t) - 1}{\omega_0 t} \cdot \sin \omega_0 t. \tag{7}$$

Функція $\varphi(t)$ — парна за умовою, а тому функція $\alpha(t) = [\varphi(t) - 1]/\omega_0 t$ — непарна і її спектр є sin-перетворення Фур'є. Функцію $B_2(\omega)$ можна одержати множенням спектра $F_\alpha(\omega)$ функції $\alpha(t)$ на $\sin \omega_0 t$. Кожна компонента спектра $F_\alpha(\omega)$, помножена на $\sin\omega_0 t$, дає дві компоненти виду — $\cos(\omega+\omega_0)t$ і $\cos(\omega-\omega_0)t$. Це означає, що спектр $B_2(\omega)$ в області додатних частот є непарно-симетричним відносно точки ω_0, а в області від'ємних частот — відносно точки $-\omega_0$. Таким чином,

$$B_2(\omega_0-\Omega) = -B_2(\omega_0+\Omega), \tag{8}$$

де $\Omega=\omega-\omega_0$ при $\omega>\omega_0$ і $\Omega=\omega_0-\omega$ при $\omega<\omega_0$.

Враховуючи цю симетрію, можна вираз (5) привести до вигляду

$$b_2(t) = -\frac{2\Delta t}{\pi}\sin\omega_0 t\int\limits_0^{\Delta\omega} B(\omega_0+\Omega)\sin\Omega t dt,$$

де $\Delta\omega=\omega_0-\omega_в=\omega_{max}-\omega_0$.

Підставивши з (7) вираз для $b_2(t)$, одержимо

$$\frac{1-\varphi(t)}{t} = 2\int\limits_0^{\Delta\omega} B_2(\omega_0+\Omega)\sin\Omega t d\Omega. \tag{9}$$

Вираз (9) є зворотне перетворення Фур'є функції $[1-\varphi(t)]/t$, звідки пряме перетворення

$$B_2(\omega_0+\Omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1-\varphi(t)}{t}\sin\Omega t dt,$$

або

$$B_2(\omega_0+\Omega) = \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\cdot\frac{\sin\Omega t}{t}dt. \tag{10}$$

Продиференціюємо вираз (10) по Ω

$$\frac{d}{d\Omega}B_2(\omega_0+\Omega) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\varphi(t)\cos\Omega t dt, \tag{11}$$

звідки зворотнє перетворення Фур'є

$$\varphi(t) = -2\int\limits_0^{\Delta\omega}\frac{d}{d\Omega}B_2(\omega_0+\Omega)\cos\Omega t d\Omega,$$

тобто функція $-\frac{d}{d\Omega}B_2(\omega_0+\Omega)$ є спектр вагової функції $\varphi(t)$.

Таким чином, композиційній функції виду (2) повинна відповідати висікаюча функція, яка має такі властивості:

1. $B(\omega)=1$ на ділянці $(-\omega_в)\div\omega_в$.

2. Функція $B_2(\omega)$, яка визначає форму «фронтів» висікаючої функції, повинна бути парною відносно точки $\omega = 0$, а значить, висікаюча функція $B(\omega)$ теж повинна бути парною.

3. Додатна і від'ємна частини $B_2(\omega)$ є відповідно непарні функції відносно точок $\omega = \omega_0$ і $\omega = -\omega_0$.

4. Вагова функція $\varphi(t)$ за умовою повинна бути незнакозмінною і спадаючою, отже, повинна виконуватися умова

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt < \infty,$$

звідки згідно з формулою (11) випливає необхідність виконання нерівності

$$-\infty < \frac{d}{d\omega} B(\omega_0) < 0.$$

Вказані умови не настільки повні, щоб однозначно визначати вагову функцію, тобто повинна існувати множина вагових функцій, які в тій чи іншій мірі зменшують похибку відновлення відрізка функції з обмеженим спектром зрізаним рядом (1).

Найбільш простий метод одержання необхідних вагових функцій полягає в тому, що спектральна функція $B_2(\omega)$ вибирається у вигляді степеневого полінома. Наприклад, легко показати, що при

$$B_2(\omega) = \frac{1}{2\Delta\omega^3}(\omega_{\max} - \omega)^3$$

вагова функція має вигляд

$$\varphi_3(\omega) = \frac{6}{x^3}(x - \sin x),$$

де

$$x = \Delta\omega t;$$

функції

$$B_2(\omega) = \frac{1}{4}\left[\frac{5}{\Delta\omega^4}(\omega_{\max} - \omega)^4 - \frac{3}{\Delta\omega^5}(\omega_{\max} - \omega)^5\right]$$

відповідає вагова функція

$$\varphi_5(x) = \frac{60}{x^5}[x(2 + \cos x) - 3\sin x].$$

Проілюструємо можливість зменшення похибки відновлення таким прикладом. Відновлюється відрізок функції $f(t) = \frac{1}{2} + \cos\omega t$. Інтервали між відрізками $\omega \cdot \Delta t = \frac{4}{9}\pi$. Розрахунки відносної похибки відновлення в центрі відрізка ($t = 0$) при застосуванні звичайного ряду і ряду з ваговою функцією φ_5 дають такі результати для різної кількості відліків:

$2N$	2	4	6	8	10
$\Delta_{кот}$	$+7{,}4\%$	$+7{,}4\%$	$<0{,}1\%$	$-8{,}2\%$	$+3{,}0\%$
$\Delta_{ваг}$	$+3{,}6\%$	$+3{,}6\%$	$-0{,}7\%$	$-0{,}4\%$	$<0{,}1\%$

На закінчення відзначимо, що питання про можливість використання композиційних функцій, відмінних від функцій виду (2), потребує окремого розгляду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Kohlenberg. Exect Interpolation of Band-Limited Functions. — Journal of Applied Physics, v. 24, N 12, December 1953.

Г. И. ВАСЮК

УМЕНЬШЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ОТРЕЗКА ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ ПО ДИСКРЕТНЫМ ОТСЧЕТАМ

Краткое содержание

В статье предлагается вариант ряда Котельникова, в котором используются композиционные функции, убывающие быстрее, чем функции вида $\sin x/x$. Рассматривается применение этого варианта ряда для восстановления функции с ограниченным спектром.

G. I. VASJUK

THE REDUCTION OF THE INTERPOLATION ERROR OF THE BAND-LIMITED FUNCTION SEGMENT

Summary

This paper presents the sampling theorem alternate, using compounde functions, which converge rapidly, then those of $\sin x/x$. The application of this sampling theorem alternate for interpolation of a band-limited function segment is under discussion.