*Н. Г. ГАТКІН, В. О. ГЕРАНІН, М. І. КАРНОВСЬКИЙ,
Л. Г. КРАСНИЙ, М. І. ЧЕРНІЙ*

ОДНОВИМІРНА ГУСТИНА ІМОВІРНОСТІ ФАЗИ АДИТИВНОЇ СУМІШІ МОДУЛЬОВАНОГО СИГНАЛУ І ГАУСОВОГО ШУМУ

У літературі [1, 2] є ряд виразів одновимірної густини імовірності фази суміші сигналу і гаусового шуму $W(\theta)$. Однак ніхто з авторів не враховує можливу асиметрію спектральної густини середньої потужності $F(\omega)$ відносно частоти ω_0, відповідної максимуму $F(\omega)$.

Нижче обчислюється $W(\theta)$ для суміші радіосигналу з амплітудною і кутовою модуляцією і гаусового шуму з обліком асиметрії спектра (нижче це відповідає $b_1 \neq 0$).

Нехай шум $N(t)$ — нормальний випадковий процес на виході лінійної системи з резонансною частотою ω_0

$$N(t) = E(t)\cos[\omega_0 t - \Phi(t)] = N_c(t)\cos\omega_0 t + N_s(t)\sin\omega_0 t. \quad (1)$$

Сигнал $S(t)$ являє собою високочастотне коливання частоти ω_c, модульоване одночасно по амплітуді $A(t)$ і по куту $\Psi(t)$,

$$S(t) = A(t)\cos[\omega_c t - \Psi(t)] = \alpha(t)\cos\omega_0 t - \beta(t)\sin\omega_0 t, \quad (2)$$

де

$$\alpha(t) = A(t)\cos[\omega_d t - \Psi(t)]; \quad (3)$$

$$\beta(t) = A(t)\sin[\omega_d t - \Psi(t)]; \quad (4)$$

$$\omega_d = \omega_c - \omega_0. \quad (5)$$

Суміш сигнал + шум

$$V(t) = S(t) + N(t) = R(t)\cos[\omega_0 t - \theta(t)], \quad (6)$$

де

$$R(t) = \sqrt{[N_c(t) + \alpha(t)]^2 + [N_s(t) - \beta(t)]^2}; \quad (7)$$

$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{N_s(t) - \beta(t)}{N_c(t) + \alpha(t)}. \quad (8)$$

Для того щоб обчислити одновимірну густину імовірності фази $\theta(t)$, скористуємось відомою чотиривимірною густиною ймовірності нормальних випадкових процесів $R(t)$ і $\theta(t)$ та їх похідних у збіжні моменти часу — $W_4(R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta})$.

$$W_4(R, \dot{R}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{R^2}{4\pi^2 B} \exp\left[-\frac{b_2}{2B}[R^2 - 2AR\cos(\theta+\varphi) + A^2] - \right.$$

$$-\frac{b_0}{2B}\{\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2 + 2(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}[R\dot{\theta}\sin(\theta+\psi) -$$

$$-\dot{R}\cos(\theta+\psi)]\} + \frac{b_1}{B}\{R^2\dot{\theta} - A[\dot{R}\sin(\theta+\varphi) + R\dot{\theta}\cos(\theta+\varphi)] -$$

$$\left. - A^2\dot{\varphi} + R(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}\sin(\theta+\psi)\}\right], \tag{9}$$

де

$$\varphi = \omega_d t - \Psi(t); \tag{10}$$

$$B = b_0 b_2 - b_1^2; \tag{11}$$

$$b_n = \int_0^\infty W(f)(\omega - \omega_0)^n\, df; \tag{12}$$

$W(f)\Delta f$ — середня потужність шуму у смузі частот Δf.

Очевидно, що $b_0 = \sigma^2$ — дисперсія шуму.

$$\left.\begin{aligned} \cos\psi &= \frac{\dot{A}\cos\varphi - A\dot{\varphi}\sin\varphi}{\sqrt{\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2}}; \\ \sin\psi &= \frac{\dot{A}\sin\varphi + A\dot{\varphi}\cos\varphi}{\sqrt{\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Проінтегруємо (9) по $\dot{R}$ у межах від $-\infty$ до $+\infty$. Для цього випишемо ті члени показника експоненти у виразі (9), які містять в собі $\dot{R}$,

$$-\frac{b_0}{2B}\dot{R}^2 + \left[\frac{b_0}{B}(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}\cos(\theta+\psi) - \frac{b_1}{B}A\sin(\theta+\varphi)\right]\dot{R}. \tag{14}$$

Використовуючи формулу (П. 1.10-$^{\partial}$) з [1, т. I, стор. 703], маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-m\dot{R}^2 - n\dot{R})\, d\dot{R} = \sqrt{\frac{\pi}{m}} \exp\left(\frac{n^2}{4m}\right), \tag{15}$$

де

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{b_0}{2B}; \\ n &= -\frac{b_0}{B}(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}\cos(\theta+\psi) + \frac{b_1}{B}A\sin(\theta+\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Легко побачити, що ні m, ні n не залежать від R і θ, по яких ще треба буде інтегрувати. Тому (15) увійде співмножником в остаточний розрахунок без змін.

Проінтегруємо густину імовірності

$$W_3(R,\theta,\dot{\theta}) = \frac{R^2}{2\pi\sqrt{2\pi B b_0}}\exp\left\{\frac{n^2}{4m} - \frac{b_2}{2B}[R^2 - 2AR\cos(\theta+\varphi) + A^2] - \frac{b_0}{2B}[R^2\dot{\theta}^2 + \dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2 + 2(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}R\dot{\theta}\sin(\theta+\psi)] + \frac{b_1}{B}[R^2\dot{\theta} - AR\dot{\theta}\cos(\theta+\varphi) - A^2\dot{\varphi} + R(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}\sin(\theta+\psi)]\right\} \qquad (17)$$

по змінній $\dot{\theta}$ у межах від $-\infty$ до $+\infty$. Скориставшись тією ж формулою (П. 1.10^{д}) з [1], маємо

$$W_2(R,\theta) = \frac{R}{2\pi b_0}\exp\left\{\frac{n^2}{4m} + \frac{(m_1R + n_1)^2B}{2b_0} - \frac{b_2}{2B}[R^2 - 2AR\cos(\theta+\varphi) + A^2] - \frac{b_0}{2B}(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2) + \frac{b_1}{B}[R(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi})^{1/2}\sin(\theta+\psi) - A^2\dot{\varphi}]\right\}, \qquad (18)$$

де

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -\frac{b_1}{B}; \\ n_1 &= \frac{b_0}{B}(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}\sin(\theta+\psi) + \frac{b_1}{B}A\cos(\theta+\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Нарешті проінтегруємо (18) по R у межах від 0 до ∞. Для цього виділимо у показнику експоненти (18) члени, які містять в собі R,

$$-\frac{b_2}{2B}R^2 + \frac{b_2}{B}AR\cos(\theta+\varphi) + \frac{b_1}{B}R(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}\cdot \sin(\theta+\psi) + \frac{B}{2b_0}(m_1^2R^2 + 2m_1n_1R). \qquad (20)$$

Скориставшись формулою (П. 1.52) з [1, т. 1, стор. 712], маємо

$$\int_0^\infty R\exp\left(-\frac{1}{2}m_2R^2+n_2R\right)dR=\frac{1}{m_2}\left[\Gamma(1),F_1\left(1;\frac{1}{2};\frac{n_2^2}{4m_2}\right)+\right.$$

$$\left.+n_2\sqrt{\frac{2}{m_2}}\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),\ F_1\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{n_2^2}{4m_2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{m_2}\left[1+\exp\left(\frac{n_2^2}{4m_2}\right)\cdot n_2\sqrt{\frac{\pi}{2m_2}}\times\Theta\times\left(\frac{n_2}{\sqrt{2m_2}}\right)\right.$$

$$\left.+n_2\sqrt{\frac{\pi}{2m_2}}\cdot\exp\left(\frac{n_2^2}{4m_2}\right)\right], \tag{21}$$

де

$$\Theta(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Беручи до уваги співвідношення

$$1+\Theta(x)=2\Phi(x\sqrt{2}),$$

де

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

одержуємо із (21)

$$\int_0^\infty R\exp\left(-\frac{1}{2}m_2R^2+n_2R\right)dR=$$

$$\frac{1}{m_2}\left[1+\frac{n_2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{m_2}}\exp\times\left(\frac{n_2^2}{4m_2}\right)\cdot\Phi\left(\frac{n_2}{\sqrt{m_2}}\right)\right],$$

де

$$\left.\begin{aligned}m_2&=\frac{b_2}{B}-\frac{m_1^2}{b_0}B;\\ n_2&=\frac{b_2}{B}A\cos(\theta+\varphi)+\frac{b_1}{B}(\dot{A}^2+A^2\dot{\varphi}^2)^{1/2}\sin(\theta+\psi)+B\frac{m_1n_1}{b_0}.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отже, остаточно

$$W(\theta)=\frac{1}{2\pi b_0m_2}\exp(P+Q+Z)\left[1+k\sqrt{2\pi}\cdot\exp\left(\frac{k^2}{4}\right)\Phi(k)\right], \tag{24}$$

де

$$P = -\frac{b_2}{2B}A^2 - \frac{b_0}{2B}(\dot{A}^2 + A^2\dot{\varphi}^2) + \frac{b_1}{B}(-A^2\dot{\varphi});$$

$$Q = \frac{n^2}{4m}; \qquad L = \frac{n_1^2}{2b_0}B; \qquad k = \frac{n_2}{\sqrt{m_2}}.$$

Із виразу (24) виходять усі окремі випадки, розглянуті у літературі. Цікаво, що у випадку сигналу, модульованого лише по амплітуді або лише по куту, густина імовірності $W(\theta)$ від b_1 не залежить. У цих випадках вираз (24) набуває такого вигляду, в якому він наведений у роботі [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. Т. I и II. «Советское радио», 1961.
2. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. «Советские радио», 1957,
3. Гаткин Н. Г., Геранин В. А., Карновский М. И., Красный Л. Г., Черней Н. И. Одномерная плотность вероятности производной фазы аддитивной смеси модулированного сигнала и гауссова шума. — «Радиотехника и электроника», 1965, 10, 8, 1418.

Н. Г. ГАТКИН, В. А. ГЕРАНИН, М. И. КАРНОВСКИЙ, Л. Г. КРАСНЫЙ, Н. И. ЧЕРНЕЙ

ОДНОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗЫ АДДИТИВНОЙ СМЕСИ МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА И ГАУССОВА ШУМА

Краткое содержание

Получено выражение одномерной плотности вероятности фазы аддитивной смеси модулированного сигнала и гауссова шума — $W(\theta)$. Учтена ассимметрия спектральной плотности средней мощности $F(\omega)$ относительно частоты ω_0, соответствующей максимуму $F\omega$.

N. G. GATKIN, V. A. GERANIN, M. I. KARNOVSKY, L. G. KRASNY N. I. CHERNEY

THE FIRST PROBABILITY DENSITY OF THE PHASE OF AS A MODULATED SIGNAL AND GAUSSIAN NOISE

Summary

The expression for first probability density of the phase of a sum of a modulated signal and Gaussian noise — $W(\theta)$ is derived. The assumetry of the spectral density of a mean power relatively $F(\omega)$ of the frequency ω_0, corresponding maximum of $F(\omega)$ is taken into consideration.