І. Л. ОБОЗНЕНКО

РОЗСІЯННЯ ПЛОСКОЇ ЗВУКОВОЇ ХВИЛІ НА НЕСКІНЧЕННОМУ КРУГОВОМУ ЦИЛІНДРІ ПРИ ЗМІШАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ НА ЙОГО ПОВЕРХНІ

Нехай плоска звукова хвиля, яка поширюється в напрямі позитивної осі x, падає перпендикулярно до осі нескінченного кругового циліндра радіуса $r = a$. Частину поверхні циліндра, обмежену двома твірними, вважатимемо жорсткою, а останню частину — м'якою. Питання зводиться до розв'язання задачі розсіяння плоскої звукової хвилі на колі при змішаних крайових умовах на його поверхні.

При падінні плоскої хвилі на нескінченний циліндр в області, зовнішній відносно кола радіуса a, $a < r < +\infty$, виникає така розсіяна хвиля, що на м'якій поверхні циліндра сума потенціалів падаючої $\Phi_п(a, \theta)$ та розсіяної $\Phi_р(a, \theta)$ хвиль повинна дорівнювати нулю, а на жорсткій частині циліндра сума нормальних похідних цих хвиль повинна перетворитися до нуля. Такі граничні умови можна зобразити у вигляді

$$\begin{aligned} &\Phi_р(a, \theta) = -\Phi_п(a, \theta), \; b < \theta < c; \\ &-\left.\frac{\partial \Phi_р}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial \Phi_п}{\partial r}\right|_{r=a}, \; c < \theta < d, \; e < \theta < b, \end{aligned} \tag{1}$$

де r, θ — полярні координати;

$$b = \alpha - \tau; \quad c = \alpha + \tau; \; d = \alpha + \pi; \quad e = \alpha - \pi;$$

α — кут повороту циліндра відносно напряму поширення плоскої хвилі (рис. 1).

Через те що на поверхні циліндра задані граничні умови (1), розсіяна хвиля матиме різну форму при падінні плоскої хвилі на різні частини поверхні циліндра. Тому плоска хвиля не змінює свого напряму падіння, а граничні умови (1) змінюються із зміною кута α, тобто циліндр може повертатися на кут α відносно осі x.

При відсутності циліндра потенціал плоскої звукової хвилі можна зобразити у вигляді

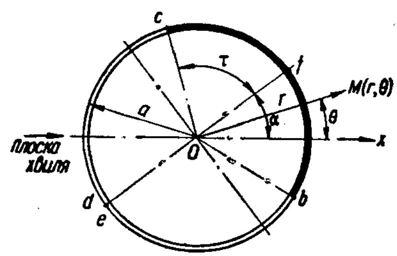
$$\Phi_п(r, \theta) = Be^{ikr\cos\theta}, \tag{2}$$

де B — деяка константа;

$k = \dfrac{\omega}{c}$ — хвильове число.

У припущенні, що функція $\Phi_п(r, \theta)$, яка відтворює паралельні хвилі, не симетрична відносно θ, зобразимо її у вигляді суми циліндричних хвиль, розкладаючи $\Phi_п(r, \theta)$ у комплексний ряд Фур'є,

$$\Phi_п(r, \theta) = B \sum_{q=-\infty}^{\infty} i^q J_q(kr)\, e^{iq\theta}, \tag{3}$$



де $J_q(kr)$ — функція Бесселя q-го порядку.

Наша задача полягає у знаходженні наближеного розв'язку хвильового рівняння гармонічних коливань

$$\Delta\Phi_р + k^2\Phi_р = 0, \tag{4}$$

яке задовольняє граничні умови (1) і додаткові потреби, щоб функція була поширювальною хвилею.

Очевидно, що хвиля, яка поширюється, може бути зображена у вигляді суми, яка складається з функцій Ганкеля першого роду

$$\Phi_р(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m(kr)\, e^{im\theta}, \tag{5}$$

де A_m — дійсні або комплексні коефіцієнти;

$H_m(kr)$ — функція Ганкеля першого роду.

Для визначення коефіцієнтів A_m використаємо варіаційний метод наближеного розв'язання змішаної задачі, розвинутої в [1, 2, 3, 5] для випадку задачі випромінювання. Наближений розв'язок хвильового рівняння (4) шукатимемо у вигляді узагальненого полінома порядку N

$$\Phi_{рN}(r, \theta) = \sum_{m=-N}^{N} A_m^0 H_m(kr)\, e^{im\theta}, \quad N = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

де A_m, $m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ — такі коефіцієнти, що задовольняються граничні умови (1), якщо мінімізується функціонал

$$F_N(A_0, A_{\pm 1}, \ldots, A_{\pm N}) = k^2 \int_b^c |\Phi_п(a,\theta) + \Phi_{pN}(a,\theta)|^2 d\theta +$$

$$+ \int_c^d \left| \frac{\partial \Phi_п}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{pN}}{\partial r} \right|^2_{r=a} d\theta + \int_e^b \left| \frac{\partial \Phi_п}{\partial r} + \frac{\partial \Phi_{pN}}{\partial r} \right|^2_{r=a} d\theta. \quad (7)$$

Необхідність введення в функціонал константи $\mu = k^2$ пояснюється у [2, 3].

Розв'язуючи задачу подібно до [1, 3, 5], приходимо до системи рівнянь

$$\sum_{m=-N}^{N} A_m^0 C_{m\nu} = k\pi [\beta_\nu \overline{H_\nu(ka)} + \gamma_\nu \overline{H'_\nu(ka)}], \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N. \quad (8)$$

Тут введені такі позначення:

$$C_{\nu\nu} = 2k^2 [\tau |H_\nu(ka)|^2 + (\pi - \tau |H'_\nu(ka)|^2], \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N; \quad (9)$$

$$\underset{m \neq \nu;}{C_{m\nu}} = 2k^2 [H_m(ka) \overline{H_\nu(ka)} - H'_m(ka) \overline{H'_\nu(ka)}] \cdot \frac{\sin (m-\nu)\tau}{m-\nu} \times$$
$$\times e^{i(m-\nu)\alpha};$$

$$\beta_\nu = -\frac{2kB}{\pi} \left[i^\nu J_\nu(ka)\tau + \sum_{\substack{q=-\infty \\ -q \neq \nu}}^{\infty} i^q J_q(ka) \cdot \frac{\sin (q+\nu)\tau}{q+\nu} \times e^{i(q+\nu)\alpha} \right];$$

$$\gamma_\nu = -\frac{2kB}{\pi} \left[i^\nu J'_\nu(ka)(\pi - \tau) - \sum_{\substack{q=-\infty \\ -q \neq \nu}}^{\infty} i^q J'_q(ka) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\sin (q+\nu)\tau}{q+\nu} \cdot e^{i(q+\nu)\alpha} \right]. \quad (10)$$

Коефіцієнти $C_{m\nu}$ визначаються згідно з [5], а коефіцієнти β_ν і γ_ν є відповідно коефіцієнтами Фур'є («зрізаних» функцій) $\Phi_п(a, \theta)$ та $\frac{\partial \Phi_п}{\partial r}$ при $r = a$. Слід зауважити, що

$$C_{m\nu} = \overline{C_{\nu m}}; \quad J_{-\nu}(ka) = (-1)^{\nu} J_{\nu}(ka); \quad H_{-\nu}(ka) = (-1)^{\nu} H_{\nu}(ka).$$

Покладаючи $B = 1$, середньоквадратичну помилку δ_N^2 наближення граничних умов (1) можна зобразити подібно до [5] у вигляді

$$\frac{\delta_N^2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\pi + r - \frac{\sin 2\tau}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{k}\sum_{m=-N}^{N} A_m^0 [\overline{\beta_m} H_m(ka) + \right.$$

$$\left. + \overline{\gamma_m} H'_m(ka)\right], \tag{11}$$

де коефіцієнти β_m та γ_m обчислюються за виразом (10).

Розглянемо деякі окремі випадки граничних умов (1). Покладемо $\tau = 0$, що відповідає жорсткому циліндру. В цьому випадку коефіцієнти системи (8) набирають вигляду

$$\beta_m = 0; \quad \gamma_m = -2kBi^m J'_m(ka); \quad C_{m\nu} = 0; \quad C_{mm} = 2k^2\pi\,|H'_m(ka)|^2,$$

і розв'язок системи (8) є

$$A_m = -Bi^m \frac{J'_m(ka)}{H'_m(ka)}; \quad A_{-m} = (-1)^m A_m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N, \tag{12}$$

що відповідає відомому випадку розсіяння плоскої хвилі на жорсткому циліндрі [4].

Якщо $\tau = \pi$, що відповідає м'якому циліндру, коефіцієнти системи (8) мають вигляд

$$\gamma_m = 0; \quad \beta_m = -2kBi^m J_m(ka); \quad C_{m\nu} = 0;$$

$$C_{mm} = 2k^2\pi\,|H_m(ka)|^2,$$

а розв'язок системи

$$A_m = -Bi^m \frac{J_m(ka)}{H_m(ka)}; \quad A_{-m} = (-1)^m A_m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N. \tag{13}$$

Це є задача про розсіяння плоскої хвилі на м'якому циліндрі. Для обох цих випадків граничних умов вираз середньоквадратичної помилки наближення задачі розсіяння збігається з виразом помилки для задачі випромінювання [5].

При численному розв'язку задачі розсіяння необхідно, задаючи відповідну величину середньоквадратичної помилки (11), для даного ka та τ обчислити коефіцієнти Фур'є (10) і коефіцієнти $C_{m\nu}$ (9) при різних значеннях числа N і кута повороту α. Потім необхідно розв'язати систему N рівнянь (8) і обчислити помилку (11). Якщо для даного N помилка наближення перевищує задану перед цим величину, то необхідно збільшувати число членів узагальненого полінома (6) і розв'язати систему $N + n$ ($n = 1, 2, \ldots$) рівнянь (8), поки не одержимо заданої величини середньоквадратичної помилки. Після цього розв'язок системи (8) підставляється у вираз (6) для потенціалу розсіяної хвилі. В тих випадках, коли шукається наближений розв'язок задачі розсіяння для середніх і високих частот ($ka \gg 1$), число членів розкладу полінома (6) перевищує $N \gg 4$.

При цьому проведемо ортогоналізацію системи функцій

$$\Psi_m(r, \theta) = H_m(kr)e^{im\theta}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N, \tag{14}$$

на основі якої будується наближений розв'язок потенціалу розсіяння (6). В цьому випадку розв'язання лінійних рівнянь (8) значно спрощується і не потребує застосування складної обчислювальної електронної техніки [5].

Побудуємо лінійну комбінацію функцій $\Psi_m(r, \theta)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$ у вигляді

$$U_m(r, \theta) = \Psi_m(r, \theta) + \sum_{s=0}^{m-1} \lambda_{ms} U_s(r, \theta), \quad m \geqslant 0. \tag{15}$$

$$U_m(r, \theta) = \sum_{s=0}^{m+1} \lambda_{ms} U_s(r, \theta), \quad m < 0,$$

де $U_m(r, \theta)$ — ортогональні функції;

λ_{ms} — комплексні чи дійсні коефіцієнти, які знаходяться із умови

$$(U_m, U_\nu) = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq \nu, \\ \|U_m\|^2 = h_m & \text{при } m = \nu \end{cases} \tag{16}$$

для всіх $m, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$. Тут круглі дужки означають скалярний добуток функцій $U_m(r, \theta)$ та $U_\nu(r, \theta)$ у тій же формі, що і для функцій $\Psi_m(r, \theta)$ та $\Psi_\nu(r, \theta)$ в [5]. Із виразу (16) одержуємо

$$h_m = C_{mm} - \sum_{s=0}^{m-1} |\lambda_{ms}|^2 h_s, \quad h_m = h_{-m}, \tag{17}$$

де

$$\lambda_{ms} = \frac{1}{h_s}\left[\sum_{r=0}^{s-1} \overline{\lambda_{sr}}\lambda_{mr}h_r - C_{ms}\right], \quad m > 0,$$
$$\lambda_{ms} = \frac{1}{h_s}\left[\sum_{r=0}^{s+1} \overline{\lambda_{sr}}\lambda_{mr}h_r - C_{ms}\right], \quad m < 0, \tag{18}$$

а коефіцієнти $C_{m\nu}$ обчислюються за допомогою формули (9).

Розв'язуючи задачу подібно до [5], приходимо до виразу для коефіцієнтів A_{m0}

$$A_{m0} = \frac{\pi\eta_m}{h_m}, \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm N. \tag{19}$$

Тут

$$\eta_m = \sigma_m + \sum_{s=0}^{m-1} \overline{\lambda_{ms}}\eta_s, \quad m \geqslant 0;$$
$$\eta_m = \sigma_m + \sum_{s=0}^{m+1} \overline{\lambda_{ms}}\eta_s, \quad m < 0; \tag{20}$$

$$\sigma_m = k\,[\beta_m \overline{H_m(ka)} + \gamma_m \overline{H'_m(ka)}], \quad m = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm N. \tag{21}$$

Середньоквадратична помилка наближення для ортогональної системи функцій має вигляд

$$\frac{\delta_N^2}{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\pi + \tau - \frac{\sin 2\tau}{2}\cos 2\alpha\right] - \frac{1}{k}\sum_{m=-N}^{N} \frac{|\eta_m|^2}{h_m}, \tag{22}$$

а наближене значення потенціалу розсіяння

$$\Phi_{pN}(r, \ \theta) = \sum_{m=-N}^{N} A_{m0}U_m(r, \ \theta), \tag{23}$$

де $U_m(r, \theta)$ дається формулою (15).

ЛІТЕРАТУРА

1. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности.— Акуст. ж., 1964, 10, 3, 313—317.

2. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле

внешности сферы при смешанных граничных условиях на сфере.— Акуст. ж., 1965, 11, 2, 176—180.

3. Обозненко И. Л. О скалярном поле цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности.— Сборник трудов Киевского политехнического института. Серия радиоэлектроники, в. 2, 1965, 59—64.

4. Морс Ф. М., Фешбах Г. М. Методы теоретической физики. Т. 2. М., ИЛ, 1960.

5. Обозненко И. Л. Об одной смешанной задаче для уравнения Гельмгольца во внешности цилиндра. ДАН УССР, 9, 1965.

И. Л. ОБОЗНЕНКО

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА БЕСКОНЕЧНОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Краткое содержание

Рассмотрен вопрос о рассеянии плоской волны на бесконечном круговом цилиндре, когда часть его поверхности, ограниченная двумя образующими, жесткая, а остальная поверхность мягкая.

I. L. OBOZNENKO

THE PLANE SOUND WAVE DIFFUSING UPON INFINITE CIRCULAR CYLINDER WITH COMPLEX BOUNDARY CONDITIONS ON ITS SURFACE

Summary

The problem of the plane sound wave diffusing upon infinite circular cylinder, when part of its surface bounded by two liner parallel to the axis, is hard and the remaining surface of the cylinder is elastic, is examined.