В. П. ПУГАЧ

ПРО АКУСТИЧНЕ ПОЛЕ СФЕРИЧНОГО ПЕРЕТВОРЮВАЧА ІЗ ЗМІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ НА ЙОГО ПОВЕРХНІ

Розглядається звукове поле випромінювання сфери при змішаних граничних умовах на її поверхні, а також розсіяння плоскої хвилі на такій сфері.

§ 1. У роботі [1] розглядалося зовнішнє акустичне поле сферичного випромінювача із змішаними граничними умовами на його поверхні. Задача була розв'язана за допомогою варіаційного методу, розвинутому в [2]. Наближене розв'язання задачі будувалося на неортогональних базисних елементах $\psi_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi)$ [1]. Як модифікація цього методу для циліндричного випромінювача була розглянута ортогоналізація базисних елементів [3].

Нижче наводиться ортогоналізація базисних елементів [1] для сферичного випромінювача.

Згідно з [4] введемо нові ортогональні базисні елементи $\gamma_{\nu m}$, такі, що

$$\gamma_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi) = \psi_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi) + \sum_{\nu'=0}^{\nu} \sum_{m'=0}^{\nu'} q_{\nu m}^{\nu' m'} \gamma_{\nu' m'}(r, \vartheta, \varphi). \tag{1}$$

Коефіцієнти $q_{\nu m}^{\nu' m'}$ знаходять з умов ортогональності $\gamma_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi)$

$$q_{\nu m}^{\nu' m'} = \begin{cases} -\dfrac{e_{\nu m}^{\nu' m'}}{e_{\nu' m'}} & \text{при} \quad \begin{matrix} \nu' \neq \nu, \\ m' < m, \end{matrix} \\ 0 & \text{при} \quad \begin{matrix} \nu' = \nu, \\ m' \geqslant m, \end{matrix} \end{cases} \tag{2}$$

де $e_{\nu m}^{\nu' m'} = (\psi_{\nu m}, \gamma_{\nu' m'})$ і $e_{\nu' m'}^{\nu' m'} = (\gamma_{\nu' m'}, \gamma_{\nu' m'})$ — скалярні добутки функцій $\psi_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi)$ і $\gamma_{\nu' m'}(r, \vartheta, \varphi)$, визначені у формі [1].

Наближаючи розв'язання задачі ортогональними функціями (1), вираз потенціалу швидкостей акустичного поля випромінювання сфери при граничних умовах [1] та умовах випромінювання на нескінченності можна записати у вигляді

$$f_n(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{m=0}^{\nu} B_{\nu m} \gamma_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi), \tag{3}$$

де

$$B_{\nu m} = \frac{k^2 u_{\nu m}^{\text{орт}} + v_{\nu m}^{\text{орт}}}{e_{\nu m}}; \tag{4}$$

$$u_{\nu m}^{\text{орт}} = \iint_{s_u} u(\vartheta, \varphi) \overline{\gamma_{\nu m}(a, \vartheta, \varphi)}\, ds;$$

$$v_{\nu m}^{\text{орт}} = \iint_{s_v} v(\vartheta, \varphi) \overline{\frac{\partial \gamma_{\nu m}}{\partial r}}\bigg|_{r=a} ds. \tag{5}$$

Скалярні добутки $e_{\nu m}^{\nu' m'}$ та $e_{\nu' m'}$ можна легко визначити через коефіцієнти $c_{\nu m}^{\nu' m'}$ та $c_{\nu' m'}^{\nu' m'}$ [1]

$$e_{\nu m}^{\nu' m'} = c_{\nu m}^{\nu' m'} - \sum_{p=0}^{\nu'} \sum_{s=0}^{p} \overline{q_{\nu' m'}^{ps}} q_{\nu m}^{ps} e_{ps};$$

$$e_{\nu' m'} = c_{\nu' m'}^{\nu' m'} - \sum_{p=0}^{\nu'} \sum_{s=0}^{p} | q_{\nu' m'}^{ps} |^2 e_{ps}, \tag{6}$$

а помилка розв'язання ортогональними функціями визначиться так:

$$\delta_n^2 = 1 - \frac{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{m=0}^{\nu} \frac{| k^2 u_{\nu m}^{\text{орт}} + v_{\nu m}^{\text{орт}} |^2}{e_{\nu m}}}{k^2 \displaystyle\iint_{s_u} | u(\vartheta, \varphi) |^2 ds + \iint_{s_v} | v(\vartheta, \varphi) |^2 ds}. \tag{7}$$

§ 2. Розглянемо тепер розсіяння плоскої хвилі на сферичному перетворювачі із змішаними граничними умовами на його поверхні для неортогональної системи базисних елементів.

Нехай на сферу одиничного радіуса падає плоска звукова хвиля під деякими просторовими кутами φ_0 і ϑ_0. Тоді її можна записати у вигляді

$$\Phi_i = \Phi_{0i} e^{-i\omega t} e^{iz \cos\gamma}, \tag{8}$$

де

$$\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta_0 + \sin\vartheta \sin\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0);$$

$z = kr$; $z_0 = ka$; $Imk = 0$ в області $a < r < \infty$, a — радіус сфери.

Уявляючи плоску хвилю нескінченним рядом сферичних хвиль, вираз для потенціалу (8) запишемо у вигляді

$$\Phi_i(r, \vartheta, \varphi) = \Phi_{0i} e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{k} (a_{k\mu} \cos \mu\varphi + b_{k\mu} \sin \mu\varphi) P_k^{(\mu)}(\cos\vartheta), \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} a_{k\mu} &= (2k+1)\,\delta_\mu \frac{(k-\mu)!}{(k+\mu)!}\, i^k J_k(z)\, P_k^{(\mu)}(\cos\vartheta_0) \sin\mu\varphi_0; \\ b_{k\mu} &= (2k+1)\,\delta_\mu \frac{(k-\mu)!}{(k+\mu)!}\, i^k J_k(z)\, P_k^{(\mu)}(\cos\vartheta_0) \sin\mu\varphi_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут $J_k(z)$ — сферична функція Бесселя, а $P_k^{(\mu)}(\cos\vartheta)$ — приєднана функція Лежандра першого роду; $\delta_0 = 2$, $\delta_\mu = 1$ при $\mu > 0$.

Будемо шукати розв'язок хвильового рівняння для потенціалу розсіяної хвилі при граничних умовах [1], де покладемо

$$u(\vartheta, \varphi) = -\Phi_i(a, \vartheta, \varphi); \quad \vartheta_0(\vartheta, \varphi) = \left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\right|_{r=a}.$$

Для знаходження наближеного розв'язку поставленої задачі застосуємо варіаційний метод, розвинутий у [2].

Позначаючи

$$\varrho_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi) = \cos m\varphi h_\nu(z)\, P_\nu^{(m)}(\cos\vartheta);$$

$$\eta_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi) = \sin m\varphi h_\nu(z)\, P_\nu^{(m)}(\cos\vartheta),$$

аналогічно [1] вважатимемо, що поліном

$$f_{ns}(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{m=0}^{\nu} [D_{\nu m}\varrho_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi) + E_{\nu m}\eta_{\nu m}(r, \vartheta, \varphi)], \quad (11)$$

де $D_{\nu m}$ і $E_{\nu m}$ — довільні комплексні постійні, є розв'язком даної задачі, якщо він мінімізує функціонал

$$G[f_{ns}] = k^2 \iint_{s_u} |\Phi_i(a, \vartheta, \varphi) + f_{ns}(a, \vartheta, \varphi)|^2 ds +$$

$$+ \iint_{s_v} \left| \left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial r}\right|_{r=a} + \left.\frac{\partial f_{ns}}{\partial r}\right|_{r=a} \right|^2 ds. \quad (12)$$

Підкоряючи функціонал (12) мінімуму, приходимо до системи рівнянь

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{m=0}^{\nu}(D_{\nu m}\sigma_{\nu m}^{\nu' m'}+E_{\nu m}\omega_{\nu m}^{\nu' m'})=-t_{\nu' m'};\\&\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{m=0}^{\nu}(D_{\nu m}\xi_{\nu m}^{\nu' m'}+E_{\nu m}\varepsilon_{\nu m}^{\nu' m'})=-l_{\nu' m'};\\&m'=0,1,2,\ldots,\nu';\ \nu'=0,1,2,\ldots,n,\end{aligned}\right. \qquad (13)$$

де позначення

$$\sigma_{\nu m}^{\nu' m'}=(\varrho_{\nu m},\varrho_{\nu' m'});\quad \varepsilon_{\nu m}^{\nu' m'}=(\eta_{\nu m},\eta_{\nu' m'});$$

$$\omega_{\nu m}^{\nu' m'}=(\eta_{\nu m},\varrho_{\nu' m'});\quad \xi_{\nu m}^{\nu' m'}=(\varrho_{\nu m},\eta_{\nu' m'})$$

є скалярні добутки функцій $\varrho_{\nu m}(a,\vartheta,\varphi)$ і $\eta_{\nu m}(a,\vartheta,\varphi)$, визначені у формі [1]

$$t_{\nu m}=k^2\iint\limits_{s_u} f_{ns}(a,\vartheta,\varphi)\overline{\varrho_{\nu m}(a,\vartheta,\varphi)}\,ds+\iint\limits_{s_v}\left.\frac{\partial f_{ns}}{\partial r}\right|_{r=a}\left.\overline{\frac{\partial \varrho_{\nu m}}{\partial r}}\right|_{r=a}ds;$$

$$l_{\nu m}=k^2\iint\limits_{s_u} f_{ns}(a,\vartheta,\varphi)\overline{\eta_{\nu m}(a,\vartheta,\varphi)}\,ds+\iint\limits_{s_v}\left.\frac{\partial f_{ns}}{\partial r}\right|_{r=a}\left.\overline{\frac{\partial \eta_{\nu m}}{\partial r}}\right|_{r=a}ds. \qquad (14)$$

Помилка наближеного розв'язку аналогічно [1] має вигляд

$$\delta_n^2=1\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{n}\sum\limits_{m=0}^{\nu}(D_{\nu m}\bar{t}_{\nu m}+E_{\nu m}\bar{l}_{\nu m})}{k^2\iint\limits_{s_u}|\Phi_i|^2ds+\iint\limits_{s_v}\left|\left.\frac{\partial\Phi_i}{dr}\right|_{r=a}\right|^2ds}. \qquad (15)$$

Якщо вся поверхня сфери абсолютно тверда, тобто $\beta=0$ [1] і до того ж плоска хвиля падає на сферу під кутом $\vartheta_0=0$, всі коефіцієнти наближення $D_{\nu m}=0$ при $m\neq 0$. При цьому приходимо до відомого точного виразу коефіцієнтів розв'язку [4]

$$D_{\nu 0}=(2\nu+1)\,i^{\nu}\frac{J_{\nu}'(z_0)}{h_{\nu}'(z_0)}\Phi_{0i}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле внешности сферы при смешанных граничных условиях на сфере.— Акуст. ж., 1965, 11, 2.
2. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности.— Акуст. ж., 1964, 10, 3.
3. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. І. ИЛ, 1958, стр. 858.
4. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960, стр. 257.
5. Обозненко И. Л. Об одной смешанной задаче для уравнения Гельмгольца во внешнем цилиндре. ДАН УССР, 9, 1965.

В. П. ПУГАЧ

ОБ АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Краткое содержание

Рассматривается решение задачи излучения сферического преобразователя со смешанными граничными условиями на его поверхности в системе ортогональных базисных элементов, а также рассеяние плоской звуковой волны на сфере с аналогичными граничными условиями на поверхности сферы.

V. P. PUGACH

TO THE QUESTION OF THE SPHERICAL TRANSFORMER WITH COMPLEX BOUNDERY CONDITIONS UPON ITS SURFACE ACOUSTICAL FIELD

Summary

The decision of the spherical transformed with complex boundery conditions upon it surface radition problem in the system of ortogonal base elements and the diffusing, of a plan sound wave the sphere with the same boundery conditions upon sphere surface are examined.