Я. К. ТРОХИМЕНКО

МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ ВХІДНОЇ ФУНКЦІЇ РЕАКТИВНОГО КОЛА

Основний етап синтезу електричного або радіотехнічного кола полягає в реалізації заданої функції еквівалентною схемою. В загальнопоширених методах синтезу [1] задана функція тим чи іншим способом розкладається на складові частини, для яких відомі схеми реалізації. Такий метод не є досить загальним, особливо в тих випадках, коли необхідно реалізувати функцію канонічною схемою, тобто схемою з мінімальною кількістю елементів. Між тим при використанні матричних методів опису та перетворення параметрів електричного кола можлива безпосередня реалізація заданої функції без розкладання її на складові частини. Подібний метод може базуватися на узагальненому методі вузлових напруг [2] і бути його логічним продовженням в галузі синтезу [3].

Функції реактивних кіл можна описати рівнянням

$$F(p) = H \cdot \frac{p(p^2+\omega_{01}^2)(p^2+\omega_{02}^2)\dots(p^2+\omega_{0m}^2)}{(p^2+\omega_{п1}^2)(p^2+\omega_{п2}^2)\dots(p^2+\omega_{пl}^2)}, \tag{1}$$

де $2l = (2m+1) \pm 1$ в залежності від поведінки функції на нульовій або нескінченній частоті, а корені чисельника та знаменника переміжуються, $0 < \omega_{п1} < \omega_{01} < \omega_{п2} < \omega_{02} < \dots < \omega_{0m} < \infty$.

Функцію вхідного імітансу можна виразити через визначник та головний мінор матриці провідностей як

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{\Delta\begin{pmatrix}1\dots n\\1\dots n\end{pmatrix}}{\Delta\begin{pmatrix}2\dots n\\2\dots n\end{pmatrix}}. \tag{2}$$

Таким чином, якщо задана вхідна функція реактивного кола, то, визначивши по її рівнянню мінори матриці провідностей нульового та першого порядків, можна побудувати матрицю провідностей, еквівалентну схемі кола, яка задовольняє рівнянню (1) заданої функції.

Матрицю провідностей порядку n реактивного кола з $n+1$ вузлами можна записати як

$$[Y] = p^{-1}([\Gamma] + p^2 [C]) = p^{-1}[D], \tag{3}$$

де $[\Gamma]$ — матриця зворотних індуктивностей;

$[C]$ — матриця ємностей.

Матрицю $[D]$ можна розглядати, як пучок квадратичних форм [3, 5], та подати її визначник многочленом

$$\Delta_D = \Delta_C \begin{pmatrix} 1 \dots r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \Delta_\Gamma \begin{pmatrix} n-r \dots n \\ n-r \dots n \end{pmatrix} p^{2d} (p^2 + \omega^2_{2(d+1)}) \dots (p^2 + \omega^2_{2r}), \tag{4}$$

де r — ранг матриці $[C]$, що визначає повне число коренів;

d — дефект матриці $[\Gamma]$, що визначає число нульових коренів.

Визначник Δ відрізняється від Δ_D тільки множником p^{-n}, а тому можна записати

$$\Delta = \Delta_C \begin{pmatrix} 1 \dots r \\ 1 \dots r \end{pmatrix} \Delta_\Gamma \begin{pmatrix} n-r \dots n \\ n-r \dots n \end{pmatrix} p^{2d-n} (p + \omega^2_{2d+2}) (p^2 + \omega^2_{2r}). \tag{5}$$

Аналогічно многочлен Δ_{11} матриці провідностей

$$\Delta_{11} = \Delta_C \begin{pmatrix} 2 \dots r' \\ 2 \dots r' \end{pmatrix} \Delta_\Gamma \begin{pmatrix} n'-r' \dots n \\ n-r' \dots n \end{pmatrix} p^{2d'-n+1} (p^2 + \omega^2_{2d'+2}) \dots$$

$$\dots (p^2 + \omega^2_{2r'}). \tag{6}$$

Найвищий степінь многочлена Δ_{11} залежить від ранга r' підматриці $C\begin{pmatrix} 2 \dots n \\ 2 \dots n \end{pmatrix}$, а число нульових коренів — від дефекту d' підматриці $\Gamma\begin{pmatrix} 2 \dots n \\ 2 \dots n \end{pmatrix}$. Ранги особливих матриць $[C]$ і $[\Gamma]$ не можуть відрізнятися більше ніж на одиницю від порядку матриці $[Y]$, а тому

$$\left.\begin{array}{llll} r' = r - 1 & \text{при } r = n; & d' = 0 & \text{при } d = 0, \\ r' = r & \text{при } r = n - 1; & d' = 0 & \text{при } d = 1. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Таким чином,

$$Y_{11} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = \frac{p^{2d-n}[a_{2(r-d)}p^{2(r-d)} + \dots + a_2 p^2 + a_0]}{p^{1-n}[b_{2r'}p^{2r'} + \dots + b_2 p^2 + b_0]}, \tag{8}$$

де прийнято $d' = 0$ з врахуванням співвідношень (7).

Порівнюючи [1] і [8], можна визначити постійний множник

$$H = \frac{a_{2(r-d)}}{b_{2r'}} = \frac{\Delta_C\begin{pmatrix}1\dots r\\1\dots r\end{pmatrix}\Delta_\Gamma\begin{pmatrix}n-r\dots n\\n-r\dots n\end{pmatrix}}{\Delta_C\begin{pmatrix}2\dots r'\\2\dots r'\end{pmatrix}\Delta_\Gamma\begin{pmatrix}n-r'\dots n\\n-r'\dots n\end{pmatrix}}. \tag{9}$$

Враховуючи, що найменше число елементів w_c та w_Γ рівно рангу відповідних матриць, що не можуть відрізнятися більше ніж на одиницю від порядку матриці $[Y]$, та порівнюючи рівняння (1) (7) і (8), визначимо числа n, w_C і w_Γ для чотирьох можливих випадків поведінки функції $Y_1(p)$ на нульовій та нескінченній частотах.

1. $Y_1(0) \to \infty$; $Y_1(\infty) \to \infty$. Степінь чисельника парний та на одиницю більший степеня знаменника

$$Y_1 = \frac{a_{2m}p^{2m} + \dots + a_0}{p\,[a_{2(m-1)}p^{2(m-1)} + \dots + b_0]}.$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням [8], бачимо, що $d = 0$, $r' = r - 1$, тобто матриці $[C]$ і $[\Gamma]$ неособливі і

$$n = w_C = w_\Gamma = m. \tag{10}$$

2. $Y_1(0) \to 0$; $Y_1(\infty) \to \infty$. Степінь чисельника непарний та на одиницю більший від степеня знаменника

$$Y_1 = \frac{p\,(a_{2m}p^{2m} + \dots + a_0)}{b_{2m}p^{2m} + \dots + b_0}.$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням [8], знаходимо, що $d = 1$, $r' = r - 1$. Таким чином, матриця $[C]$ неособлива, а матриця $[\Gamma]$ особлива, тому що $2m = 2r' = 2(n-1)$ і

$$n = w_C = m + 1; \qquad w_\Gamma = m. \tag{11}$$

3. $Y_1(0) \to \infty$; $Y_1(\infty) \to 0$. Степінь чисельника парний і на одиницю менший від степеня знаменника

$$Y_1 = \frac{a_{2m}p^{2m} + \dots + a_0}{p\,(b_{2m}p^{2m} + \dots + b_0)}.$$

У цьому випадку $d = 0$, $r = r'$, тобто матриця $[\Gamma]$ — неособлива, матриця $[C]$ — особлива і відповідно до рівняння (8)

$$n = w_\Gamma = m + 1; \qquad w_C = m. \tag{12}$$

4. $Y_1(0) \to 0$; $Y_1(\infty) \to 0$. Степінь чисельника непарний і на одиницю менший від степеня знаменника

$$Y_1 = \frac{p\,(a_{2m}p^{2m} + \dots + a_0)}{b_{2(m+1)}p^{2(m+1)} + \dots + b_0}.$$

У цьому випадку $d = 1$, $r' = r$, тобто матриця [Г] — особлива, матриця [C] — особлива та

$$n = m + 1; \qquad w_\Gamma = w_C = m. \tag{13}$$

Знаючи n, w_C та w_Γ для заданої функції, можна визначити структуру реалізуючої схеми. Для цього досить розмістити елементи C і L кількістю w_C і w_L між $n+1$ вузлами так, щоб елементи кожного типу утворювали власне дерево схеми, причому виконувались відповідні умови для $Y_1(0)$ і $Y_1(\infty)$. Побудовані таким чином зв'язані схеми (в тому числі схеми Фостера і Кауера) будуть канонічними схемами реалізації заданої функції вхідного імітансу.

Параметри канонічної схеми реалізації з найменшою кількістю елементів можна визначити, використавши розкладання визначника суми двох матриць [2]

$$\Delta = p^{-n}\sum_{q=0}^{n} p^q \sum_{1\leqslant k_j;\, i_j\leqslant n} \Delta_C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_q \\ k_1 k_2 \ldots k_q\end{pmatrix}\Delta_\Gamma\begin{pmatrix} i_{q+1} \ldots i_n \\ k_{q+1} \ldots k_n\end{pmatrix}(-1)^\delta; \tag{14}$$

$$\delta = \sum_{j=1}^{q} i_j + k_j,$$

де сумуються добутки мінорів усіх порядків від 0 до n на алгебраїчні доповнення взаємно відповідних мінорів.

Таким чином, коефіцієнти полінома Δ можна виразити формулою

$$a_q = \sum_{1\leqslant k_j;\, i_j\leqslant n} (-1)^\delta \Delta_C\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_q \\ k_1 k_2 \ldots k_q\end{pmatrix}\Delta_\Gamma\begin{pmatrix} i_{q+1} \ldots i_n \\ k_{q+1} \ldots k_n\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Щоб визначити коефіцієнти полінома Δ_{11}, досить сумування провести в межах $2 \leqslant k_j;\ i_j \leqslant n$.

Визначаючи відповідно до формули (15) коефіцієнти поліномів Δ та Δ_{11} матриці провідностей та прирівнюючи їх відповідним коефіцієнтам заданої функції, одержимо систему рівнянь, в якій число невідомих $w = w_C + w_\Gamma$ буде на одиницю менше числа рівнянь. Для однозначного визначення параметрів кола як додаткове невідоме можна ввести постійну k, на яку множать всі коефіцієнти заданої функції.

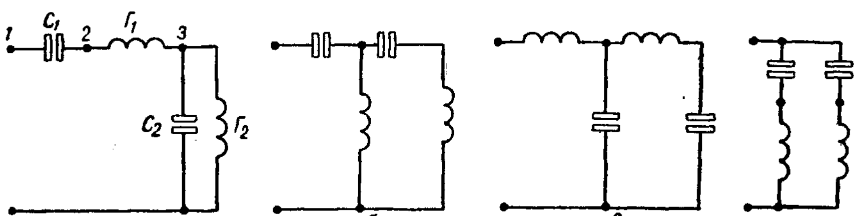
Підсумовуючи сказане, можна констатувати, що процедура реалізації функції вхідного імітансу полягає у визначенні величин n, w_C та w_Γ за формулами (10) — (13), побудуванні відповідної схеми реалізації з мінімальною кількістю елементів та складанні системи рівнянь для w невідомих параметрів кола та множника k. Щоб унаочнити цю процедуру, розглянемо реалізацію функції

$$Y_1 = \frac{p\,(p^2+4)}{p^4 + 10p^2 + 9}.$$

За формулами (13) знаходимо $n=3$; $w_C = w_\Gamma = 2$ та складаємо одну із схем, показаних на рис. 1, для яких $Y_1(0)=0$; $Y_1(\infty)=0$.

Матриця провідностей схеми, наведеної на рис. 1, *а*,

$$[Y] = \begin{bmatrix} pC_1 & -pC_1 & 0 \\ -pC_1 & p(C_1+C_2)+\frac{\Gamma_1}{p} & -pC_2 \\ 0 & -pC_2 & pC_2+\frac{\Gamma_2}{p} \end{bmatrix}.$$



а *б* *в* *г*

Визначаючи поліноми Δ та Δ_{11} безпосередньо або по матрицях $[C]$ і $[\Gamma]$ за формулами [14] або [15], знаходимо функцію вхідної провідності

$$Y_1 = \frac{p\,[p^2C_1C_2(\Gamma_1+\Gamma_2)+C_1\Gamma_1\Gamma_2]}{p^4C_1C_2+p^2\,[\Gamma_2(C_1+C_2)+\Gamma_1C_2]+\Gamma_1\Gamma_2}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти чисельника і знаменника заданої та побудованої функцій та перемножуючи всі коефіцієнти заданої функції на k, складаємо систему з п'яти рівнянь з п'ятьма невідомими

$$C_1C_2(\Gamma_1+\Gamma_2)=k; \qquad C_1\Gamma_1\Gamma_2 = 4k; \qquad C_1C_2 = k;$$
$$\Gamma_2(C_1+C_2)+\Gamma_1C_2 = 10k; \qquad \Gamma_1\Gamma_2 = 9k.$$

Розв'язання цієї системи дає нормовані величини

$$C_1 = \frac{4}{9}; \qquad C_2 = \frac{60}{961}; \qquad \Gamma_1 = \frac{16}{31}; \qquad \Gamma_2 = \frac{15}{31}; \qquad k = \frac{240}{8649}.$$

Розглянутий метод є більш загальним, ніж звичайні методи реалізації функції вхідного імітансу розкладанням її в ланцюгову або просту дріб, тому що дозволяє побудувати будь-яку канонічну схему, а не тільки канонічні схеми Кауера або Фостера [1].

Метод матриці провідностей придатний не лише для кіл без втрат або RC-кіл, але й для кіл загального вигляду.

ЛІТЕРАТУРА

1. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. Госэнергоиздат, 1961.
2. Сигорский В. П. Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами. Изд.во АН УССР, 1958.
3. Бандман О. Л. Синтез электронных RC-схем. «Наука», 1966.
4. Гантмахер Ф. Ф. Теория матриц. Гостехиздат, 1954.

Я. К. ТРОХИМЕНКО

МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ ВХОДНОЙ ФУНКЦИИ РЕАКТИВНОЙ ЦЕПИ

Краткое содержание

Описан метод реализации входных функций реактивной цепи, основанный на представлении матрицы проводимостей цепи суммой двух матриц однотипных элементов. В соответствии с видом заданной функции выбирают одну из возможных канонических схем, параметры которой вычисляют путем сравнения коэффициентов числителя и знаменателя заданной функции и входной функции выбранной схемы.

Ja. K. TROHIMENKO

METHOD OF REALIZING THE DRIVING POINT FUNCTIONS OF REACTIVE NETWORK

Summary

The problem of realizing reactive immitance function is developed. It is proven that admittance matrix reactive network can be decomposed into a sum of two one-type-element matrices. Parameters of realizing network are calculated by comparing coefficients of given function with those driving point function of network.